



MERIA Scenario “Oppervlaktevergroting”

Leerdoel	Wanneer de lengte van alle zijdes van een veelhoek worden vergroot met een bepaalde factor k , dan vergroot de oppervlakte van de veelhoek met factor k^2 .
Bredere leerdoelen	Zelfstandig algebraïsch en geometrisch redeneren. Het formuleren van algemene stellingen en bewijzen gebaseerd op formules van de omtrek en oppervlakte van verscheidene vormen, met eventueel de sinusfunctie en de optelbaarheid van oppervlakte na het opdelen van een veelhoek. Het begrip van gelijkvormige veelhoeken. Indien de leerlingen gewend zijn om te werken met ICT: het genereren van hypothesen in een grafische omgeving en dat vervolgens te gebruiken als basis voor een bewijs.
Benodigde wiskundige kennis en vaardigheden	Studenten hebben enige kennis nodig over het berekenen van het oppervlakte van veelhoeken, inclusief driehoeken en vierkanten. Ook is nodig: gelijkvormigheid, het vergroten van veelhoeken met een schaalfactor.
Leerjaar	Jaar 4, leerlingen met een leeftijd va 15-16
Tijd	90 minuten, twee lessen
Benodigd materiaal	Pen, papier, ruitjespapier, geodriehoek of liniaal, GeoGebra of een andere (digitale) tool voor het tekenen en opmeten van veelhoeken, een apparaat waarmee plaatjes gemanipuleerd kunnen worden (smartphone, pc, of tablet). Het gebruik van technologie is strikt genomen niet nodig, maar het verhoogt de bekendheid met de omgeving sterk voor de meeste leerlingen.

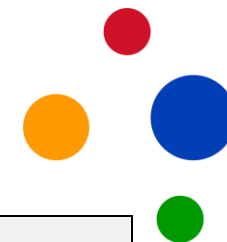
Observaties bij implementaties

De context van de observatie (niveau, instituut, land, etc.):

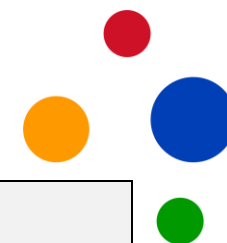
Probleem:

Bekijk deze twee afbeeldingen. Wanneer je ze opent op je smartphone of computer, dan kan je gemakkelijk de afbeeldingen vergroten. Maar wat gebeurt er met de oppervlaktes van de piramide en het zwarte gebouw wanneer je dat doet?

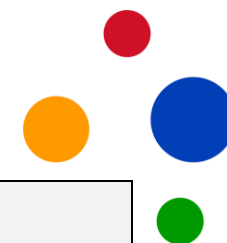




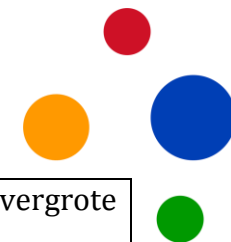
Fase	Acties van de leerkracht incl. uitleg	Acties en reacties van de leerlingen	Observaties bij implementaties
Overdracht (didactisch) 2 minuten	De leerkracht begint met de vraag: wat moet ik weten om het oppervlak van een driehoek te vinden? En hoe zit dat met het oppervlak van een veelhoek in het algemeen? Er is meer dan een antwoord mogelijk, dus je mag er ook meerdere geven. Schrijf je antwoord op papier. Je hebt hier 2 minuten voor.	De leerlingen accepteren de taak en vragen mogelijk om extra uitleg om zeker te weten of ze de taak goed begrijpen.	
Actie en formulering (a-didactisch) 2 minuten	De leerkracht loopt rond en identificeert de verschillende ideeën waar de leerlingen mee komen en opschrijven.	De leerlingen schrijven formules op zoals: $A_{vierkant} = l \cdot h,$ $A_{driehoek} = \frac{h \cdot b}{2},$ $A = \frac{a \cdot b \cdot \sin(C)}{2}.$ Mogelijk komen ze ermee dat het oppervlak van een veelhoek te berekenen is met triangulatie. Andere methodes: het tellen van vierkanten op ruitjespapier, computer gebaseerde methodes.	
Validatie (didactisch) 5 minuten	De leerkracht kiest leerlingen uit die hun antwoorden presenteren op het bord om alle strategieën gerepresenteerd te krijgen. De leerkracht vraagt de klas om vragen te stellen en opmerkingen te maken over de presentaties.	De leerlingen luisteren naar de presenterende leerlingen, en vragen om extra uitleg, maken opmerkingen of bespreken de suggesties op het bord.	



Institutionalisering (didactisch) 2 minuten	De leerkracht noemt de verschillende manieren waarmee je het oppervlak van veelhoeken kan vinden.	Leerlingen luisteren.	
Overdracht (didactisch) 2 minuten	De leerlingen worden verdeeld in groepen van drie, maar moeten beginnen met individueel werken. Ze hebben 15 minuten om hun eigen oplossing op het bovenstaande probleem voor te bereiden. Vraag de leerlingen of ze het begrijpen. De leerlingen worden voorzien van (of gevraagd om mee te nemen) papier, ruitjes papier, een schaar, een geodriehoek of liniaal, een rekenmachine en een computer met relevante software.	Leerlingen luisteren en vragen om verduidelijking waar nodig. Ze pakken wat ze willen gebruiken van het benodigde materiaal.	
Actie (a-didactisch) 15 minuten	De leerkracht loopt rond om te noteren welke strategieën de leerlingen kiezen. <i>De leerkracht heeft geen interactie, behalve voor het geven van verduidelijking omtrent het probleem.</i>	Leerlingen beginnen met het proberen van sommige strategieën met hun groep. Zie beneden voor mogelijke strategieën.	
Formulering (a-didactisch) 10 minuten	De leerkracht vraagt de groepen om tot een enkele oplossing te komen door hun persoonlijke ideeën te presenteren en bespreken. De leerkracht overziet het werk van de groepen om de presentaties te organiseren.	Leerlingen geven een korte presentatie van hun werk en de groep verfijnt de presentatie van de gekozen strategie.	
Validatie (didactisch) 20 minuten	De leerkracht vraagt de groepen om een voor een te presenteren, beginnende bij de meest praktische en vage formuleringen en eindigend met de meest algemene oplossingen.	Leerlingen geven hun best mogelijke presentatie, luisteren, en stellen uitgebreid vragen wanneer presentaties onduidelijk voor ze zijn.	

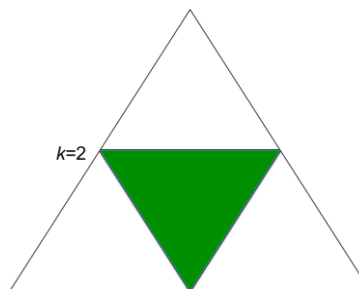


	De klas wordt aangemoedigd om samen met de leerkracht uitgebreid vragen te stellen gedurende de presentaties.		
Overdracht (didactisch) 10 minuten	De leerkracht vraagt de groepen om de relaties en verschillen tussen de gegeven antwoorden uit te leggen. Welke is "het nuttigste" en waarom?	Leerlingen accepteren de taak.	
Actie/formulering (a-didactisch) 15 minuten	De leerkracht observeert de discussies en formulering van antwoorden binnen de groepen.	Leerlingen geven mogelijk antwoorden gebaseerd op voorbeelden, berekeningen, of algebraïsche manipulatie.	
Validatie (didactisch) 10 minuten	De leerkracht gebruikt de opgedane kennis over het werk van de individuele groepen om verschillende presentaties van oplossingen te selecteren en op volgorde te zetten zodat alle strategieën worden gerepresenteerd.	Groepen presenteren hun oplossingen door gebruik te maken van het bord. Andere groepen vragen om verduidelijking of geven opmerkingen waar relevant.	
Institutionalisering (didactisch) 5 minuten	De leerkracht rondt af door de verschillende strategieën te benadrukken. Zij/hij formuleert hoe de strategieën met elkaar te maken hebben en elkaar ondersteunen, maar ook hoe sommige strategieën de voorkeur hebben in specifieke situaties (met nieuwe voorbeelden). De leerkracht formuleert het leerdoel in zijn algemene vorm, daarbij verwijzend hoe het zich voordoet in de verschillende oplossingen van de leerlingen.	Leerlingen luisteren en sommige maken eventueel wat aantekeningen.	
Totaal: 90 minuten			



Mogelijke manieren voor leerlingen om het leerdoel te behalen.

- De veelhoeken op ruitjespapier tekenen, de hoeveelheid bedekte vierkanten tellen in het originele en vergrote figuur (zonder expliciet gebruik te maken van het concept van schaalfactor van lengtes).
- De veelhoeken tekenen, de basis b en de hoogte h opmeten met een liniaal om de oppervlakte te berekenen met $A = \frac{h \cdot b}{2}$
- Experimenteren met verschillende schaalfactoren van lengtes (2, 3, 0.5, etc.) om uiteindelijk op de hypothese uit te komen dat de lengte opschalen met 2 een oppervlaktevergroting met een factor 4 geeft, etc.
 - Kan algebraïsch gerealiseerd worden vanuit voorbeelden (kies dimensie van een driehoek)
 - Kan gerealiseerd worden door driehoeken op papier te tekenen, de liniaal gebruiken om de zijdes op te meten en vervolgens de oppervlaktes te berekenen
 - De figuren kunnen getekend worden met behulp van ICT, bijvoorbeeld met GeoGebra. De lengtes van zijdes en oppervlaktes kunnen dan gemeten worden met behulp van tools binnen de applicatie.
- Teken de driehoeken op papier en knip ze uit. Wanneer de vergroting een geheel getal k is, dan past de kleinere driehoek k^2 keer in de vergrote driehoek.



- Met gebruik van ICT: teken de veelhoek, vergroot het tot een bepaald niveau, en vraag het programma om de oppervlaktes te berekenen. De leerlingen kunnen hier bijvoorbeeld Geometer's Sketchpad voor gebruiken.
- Gebaseerd op de hierboven beschreven experimenten kan de volgende symbolische redenering ontwikkeld worden:
 - Wanneer we de zijdes van een rechthoekige driehoek (met hoogte h en basis b) vergroten met een factor k , dan zal de nieuwe hoogte $k \cdot h$ zijn en de nieuwe basis $k \cdot b$. Dit betekent dat de oppervlakte vergroot is met een factor k^2 , sinds $A_2 = \frac{1}{2} \cdot kh \cdot kb = k^2 \cdot A_1$, waar A_1 de oppervlakte is van de initiële driehoek.



- Voor een algemene driehoek (niet per se rechthoekig dus) met hoogte h en basis b moet je beargumenteren waarom te hoogte vergroot tot $k \cdot h$. Dit kan gedaan worden door te kijken naar twee rechthoekige driehoeken waaruit de driehoek bestaat.
- Wanneer de lengte van de zijdes van een willekeurige driehoek (met zijdes a, b onder hoek C) vergroot worden met een factor k , dan kan de initiële oppervlakte berekend worden als $A_1 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$. De vergrote oppervlakte is dan $A_2 = \frac{1}{2} \cdot ka \cdot kb \cdot \sin(C) = k^2 \cdot A_1$
- Voor gelijkzijdige driehoeken kan de formule $A = \frac{\sqrt{3}}{4} z^2$ gebruikt worden, dus wanneer z vergroot met factor k , vergroot de oppervlakte met factor k^2 .
- Voor de rechter foto (en andere veelhoeken) deel je de veelhoek op in driehoeken en bereken je van elk de oppervlakte die opgeteld kunnen worden om tot de oppervlakte van de veelhoek te komen.
- Heron's formule kan gebruikt worden: $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Dit vereist van de studenten dat ze algebraïsche manipulatie kunnen toepassen op uitdrukkingen met wortels en machten.