



MERIA Scenarij “Tvornica bicikala”

Linearna i po dijelovima linearna funkcija

Ciljano znanje	Konstrukcija po dijelovima linearne funkcije koja je optimalno rješenje problema zadanog pomoću linearnih uvjeta.																
Širi ciljevi	Produbiti razumijevanje linearne funkcije (koeficijent smjera a i odrezak na osi ordinata b) koristeći je za konstrukciju po dijelovima linearne funkcije i skupa za koji su linearni uvjeti minimalni. Proučiti kontinuirane i diskretne aspekte algebarske i grafičke prezentacije podataka tijekom procesa modeliranja. Sposobnost matematičkog modeliranja problema.																
Potrebno matematičko predznanje	Učenici znaju nacrtati graf linearne funkcije, poznat im je izraz $f(x) = ax + b$ te interpretacija koeficijenata a i b .																
Razred	Dob 15-16 godina, 1. i 2. razred (može i ranije, ali s manjim brojevima)																
Vrijeme	50 min (80 min)																
Potrebni materijal	<p>Tablica s podacima o troškovima</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Lokacija</th> <th>Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €</th> <th>Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>A</td> <td>300 000</td> <td>120</td> </tr> <tr> <td>B</td> <td>450 000</td> <td>110</td> </tr> <tr> <td>C</td> <td>660 000</td> <td>60</td> </tr> <tr> <td>D</td> <td>680 000</td> <td>80</td> </tr> </tbody> </table> <p>Papir na kvadratiće ili milimetarski papir i/ili neka aplikacija (za promjenu linearnih uvjeta) i/ili neko računalo sa softwareom za crtanje, promjenu i dodavanje linearnih uvjeta, te za računanje presjeka pravaca. Školska ploča ili pametna ploča.</p>		Lokacija	Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €	Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €	A	300 000	120	B	450 000	110	C	660 000	60	D	680 000	80
Lokacija	Troškovi izgradnje tvornice u tom području u €	Troškovi proizvodnje jednog bicikla u tvornici u €															
A	300 000	120															
B	450 000	110															
C	660 000	60															
D	680 000	80															
<p>Primjedbe nakon provedbe Kontekst promatranja: razred, ustanova, zemlja, itd.):</p>																	

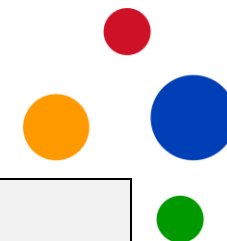


Problem: Ti si konzultant koji savjetuje tvrtku gdje je najbolje izgraditi tvornicu koja proizvodi bicikle (ili neke druge proizvode). Tvoja se ekspertiza temelji na tablici u kojoj su prikazani troškovi na pojedinim lokacijama. Koja je tvoja preporuka o lokaciji? Obrazloži svoju preporuku gdje treba izgraditi tvornicu¹.

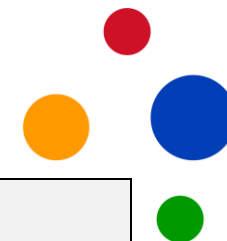


Faze	Postupci nastavnika, uključujući i upute	Postupci i reakcije učenika	Primjedbe nakon provedbe
Primopredaja (didaktički) 5 min	Nastavnik kaže: Ti si konzultant koji savjetuje tvrtku gdje je najbolje izgraditi tvornicu koja proizvodi bicikle. Kako bi pristupio tom problemu? Analizu i preporuku radiš zajedno s kolegama u manjoj grupi.	Učenici slušaju i shvaćaju važnost problema. Žele biti uključeni u rad na problemu.	
Djelovanje (adidaktički) 15 (20) min	Nastavnik zapaža i zapisuje različite načine rješavanja problema, te uočava kakvo je predznanje učenika. Važno je da nastavnik ne daje učenicima smjernice za rješavanje problema, te da grupe rade samostalno. Jedino može ponoviti zadatak, ako je to potrebno.	Grupe počinju raditi pokušavajući s različitim strategijama ovisno o njihovom predznanju. Vidi dolje "Mogući načini za učenike..." Budući da učenici rade u grupama, adidaktička formulacija će se pojaviti.	
Formulacija (didaktički) 10 (15) min	Nastavnik bira grupe (minimalno 5) koje će prezentirati različite strategije na ploči. Prije prezentacije ploču treba podijeliti na	Grupe prezentiraju rješenja po redu koji odredi nastavnik (najprije jednostavna	

¹ Problem je inspiriran Primjerom 2.10. iz knjige *Primijenjena matematika podržana računalom*, kojeg je dizajnirao autor ovog scenarija u okviru projekta "STEM genijalci".



	<p>onoliko dijelova koliko grupa ima. Predstavnici grupa trebaju napisati svoje odgovore istovremeno, prije usmenog objašnjenja korištene strategije. Rješenja ostaju na ploči dok grupe usmeno prezentiraju svoja rješenja, počevši od jednostavnijih pristupa prema složenijim. U ovom trenutku se ne traži potvrđivanje.</p>	<p>rješenja pomoću brojeva, nakon toga rješenja pomoću grafova i funkcija)</p>	
<p>Primopredaja (didaktički) 1 min</p>	<p>Komentiraj sa svojom grupom sličnosti i razlike koje vidiš u prezentiranim strategijama. Kreni od sličnosti. Iskoristi to kako bi poboljšao savjet za upravu tvornice. Prezentirat ćeš to nakon 5 (10) minuta.</p>	<p>Učenici slušaju. Ponovno provjerite da svi razumiju zadatak.</p>	
<p>Djelovanje i formulacija (adidaktički) 5 (15) min</p>	<p>Nastavnik obilazi razred da vidi što su grupe primijetile, o čemu raspravljaju i kako koriste ideje drugih grupa.</p>	<p>Grupe uočavaju sličnosti i razlike , pokušavaju razumjeti druge strategije i pomoću njih poboljšati svoje rješenje.</p>	
<p>Potvrđivanje (didaktički) 10 (15) min</p>	<p>Nastavnik poziva različite grupe, da čuje što više različitih zapažanja i poboljšanih rješenja. Nastavnik nastoji da učenici identificiraju pogreške u prethodnim rješenjima.</p>	<p>Različiti učenici formuliraju sličnosti i razlike strategija, te objašnjavaju kako su popravili svoja rješenja koristeći rješenja ostalih. Učenici također mogu ukazati na nedostatke nekih rješenja.</p>	
<p>Institucionalizacija (didaktički) 5 (10) min</p>	<p>Nastavnik ističe da ne postoji jedno točno rješenje, već da ono ovisi o odlukama kao što su očekivanje tržišta, zaposlenika i slično. Ipak, minimalni se troškovi mogu prikazati kao po dijelovima linearna funkcija (točke na grafovima ili formulama</p>	<p>Učenici zapažaju različite strategije rješenja, prepoznaju svoju strategiju te je uspoređuju s drugim strategijama. Učenici pišu svoje bilješke.</p>	



	<p>do kojih su učenici došli a koje opisuju funkciju u određenim područjima). Nastavnik objašnjava kako rješenje može biti zapisano u obliku</p> $f(x) = \begin{cases} 120x + 3 \cdot 10^5, & x \leq a \\ 60x + 6,6 \cdot 10^5, & x \geq a \end{cases}$ <p>gdje je $a=6000$. Rješenje također može biti zapisano i kao</p> $f(x) = 120x + 300\,000, x \leq a$ $h(x) = 60x + 660\,000, x \geq a.$ <p>Riječima, lokacije B i D nisu nikad optimalne, dok su A i C optimalne ovisno o tome je li količina proizvodnje manja ili veća od 6000 bicikala. Funkcija optimalnih troškova je po dijelovima linearna funkcija definirana na pozitivnim cijelim brojevima.</p>		
<p>Mogući načini da učenici ostvare ciljano znanje</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Neki učenici rade s brojevima kako bi vidjeli što oni znače: <ul style="list-style-type: none"> ○ Neki učenici računaju cijenu određenog broja bicikala u pojedinom području. Oni mogu koristiti pokušaje i pogreške kako bi pronašli brojeve za koje dva područja daju istu cijenu. ○ Učenici mogu kreirati tablice za svaku lokaciju tako da računaju ukupne troškove za neki broj bicikala, uspoređuju ih i traže najjeftinije rješenje za taj broj bicikala (to se može učiniti olovkom i papirom ili proračunskom tablicom). ○ Promatrajući dvije lokacije, gledaju kako bi se pokrila razlika između fiksnih troškova razlikom između varijabilnih troškova (na primjer, koliko bicikala mora biti proizvedeno prije nego je B bolji od A); potrebno je ukupno šest takvih usporedbi kako bi se dao potpuni odgovor. 		



- Neki učenici imaju pristup pomoću funkcija, te zapisuju četiri jednačbe, pri čemu svaka funkcija predstavlja troškove proizvodnje x bicikala:

$$f(x) = 120x + 300\,000,$$

$$g(x) = 110x + 450\,000,$$

$$h(x) = 60x + 660\,000,$$

$$k(x) = 80x + 680\,000.$$

- Grafovi funkcija su nacrtani u jednom ili više koordinatnih sustava, a iz grafičkog prikaza učenici zaključuju gdje bi trebalo izgraditi tvornicu.
- Učenici koji koriste mrežni papir mogu pročitati sjecišta.
- Učenici koji koriste IKT mogu odmah iscrtati sve linearne funkcije, ali bi mogli imati problema sa skaliranjem koordinatnih osi.
- U svakom slučaju, tumačenje funkcija i optimiranje troškova ne dolazi automatski iz navedenih pristupa, već zahtijeva razmišljanje o problemu. Doći će do pogrešaka, kao što su miješanje troškovi proizvodnje s prodajnom cijenom ili profitom itd.
- Na temelju jednačbi, presjeci između funkcija nalaze se izjednačavanjem parova jednačbi. Učenici će iskoristiti grafički prikaz kako bi znali koji su parovi jednačbi relevantni. Ova strategija također zahtijeva tehnike rješavanja jednačbi.
- Učenici mogu donijeti različite zaključke.
 - Neovisno o tome rade li učenici s brojevima (i tablicama) ili funkcijama (i grafovima) neki će shvatiti da ne postoji jedno "najbolje područje", već da savjet treba dati ovisi o tome koliko se bicikala proizvodi. Zaključak može biti više ili manje precizan, formuliran riječima, jednačbama, grafovima itd.
 - Neki će učenici dati brz i pogrešan odgovor, npr. "A je najbolja lokacija jer kad izračunamo trošak za izradu 1, 2, ..., 10 bicikala, uvijek dobivamo najniže cijene tamo."



Primjer grafova i jednažbi koje učenik može dobiti (na papiru ili koristeći neku tehnologiju) za određivanje različitih područja ovisnih o broju proizvedenih bicikala.

